Juegos con Comunicación

Alvaro J. Riascos Villegas

Noviembre de 2016

Motivation

- Considere el siguiente juego.

1\2	X_2	Y_2
X_1	2,2	0,6
Y_1	6,0	**1,1**

- (Y_1, Y_2) es un equilibrio de Nash. La ineficiencia del equilibrio motiva la introducción de un mecanismo de coordinación.
- Una forma de hacer esto es permitir que los jugadores se comuniquen. Esto puede hacer el espacio de estrategias muy complicado.
- Una alternativa es suponer que la comunicación se manifiesta en la posibilidad de firmar contratos de obligatorio cumplimiento.

Juego con contratos: sin riesgo

- Suponga que se introduce un contrato: si ambos lo firman ambos prometen jugar (X_1, X_2). Si solamente uno lo firma, digamos i, entonces i promete jugar Y_i.
- El nuevo juego es:

$1\backslash 2$	X_2	Y_2	S_2
X_1	2,2	0,6	0,6
Y_1	6,0	1,1	1,1
S_1	6,0	1,1	2,2

- Ahora (S_1, S_2) es un equilibrio de Nash (de hecho un equilibrio perfecto).

Juego con contratos: con riesgo

- Suponga que se introduce un contrato adicional: si ambos lo firman ambos entonces se lanza una moneda al aire. Si cae cara juegan (X_1, Y_2). Si cae sello juegan (Y_1, X_2). Si solamente uno firma este segundo contrato, digamos i, entonces i promete jugar Y_i.
- El nuevo juego es:

1\2	X_2	Y_2	S_2	$S‘_2$
X_1	2,2	0,6	0,6	0,6
Y_1	6,0	1,1	1,1	1,1
S_1	6,0	1,1	2,2	1,1
$S‘_1$	6,0	1,1	1,1	3,3

- Ahora $(S_1, S_2), (S‘_1, S‘_2)$ es un equilibrio de Nash (de hecho equilibrios perfectos) y existe un tercer equilibrio que cada jugador juega la estrategia mixta $(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Equilibrio Correlacionado en Forma Reducida

- Suponer que los contratos son de obligatorio cumplimiento es una hipótesis muy fuerte.
- Sin embargo, es posible que, simplemente permitiendo que estos se comuniquen estos lleguen a acuerdos compatibles con sus incentivos (*self enforcing*).

Ejemplo

- Considere el siguiente juego.

$1\backslash 2$	A	B
X	**5,1**	0,0
Y	4,4	**1,5**

- Además existe un equilibrio simétrico en estrategias mixtas $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ cuyo pago esperado es $\frac{5}{2}$ para cada jugador.
- Este último es ineficiente pues la estrategia (Y, A) tiene un mayor pago para ambos jugadores.
- Obsérvese que este equilibrio en estrategias mixtas le asigna una probabilidad positiva a (X, B).
- Vamos a ver que esta ineficiencia en parte se le puede atribuir a la selección aleatoria independiente que hacen los dos jugadores en sus estrategia mixtas.

- Obsérvese que si los agentes pudieran coordinar sus acciones con base en un mecanismo del tipo: al tirar una moneda al aire si cae cara se jugamos (X, A) si cae sello (Y, B)
- El valor esperado de cada jugador sería 3 mejor que la estrategia mixta pero aún ineficiente pues (Y, A) sigue teniendo un mayor pago para ambos jugadores.

Motivation

- Si ambos acuerdan la utilización del mismo éste es un equilibrio en el sentido de que no existen incentivos a desviarse. ¿Es posible acordar un mecanismo que sea un equilibrio y el pago esperado sea aún mejor?
- Si el mecanismo permite dar señales privadas a cada jugador la respuesta es sí.
- Vamos a demostrar que si se utiliza un mecanismo de coordinación con señales privadas, existe un equilibrio (que definimos más adelante) en el cual la utilidad de cada individuo es 3,3.

Equilibrio Correlacionado

Definition (Mecanismo de coordinación estocástico en forma reducida)

Un mecanismo de coordinación estocástico (en forma reducida) para un juego en forma estratégica es una distribución de probabilidad $\overline{p} : S_1 \times ... \times S_N \to [0,1]$. Por simplicidad vamos a considerar únicamente el caso en el que la distribución es de soporte finito.

Definition (Equilibrio correlacionado en forma reducida)

Un equilibrio correlacionado es un mecanismo de coordinación estaocástica $\overline{p} : S_1 \times ... \times S_n \to [0,1]$ tal que para toda función de recomendaciones para cada jugador $\overline{\gamma}_i : S_i \to S_i$ se tiene:

$$\sum_{s \in S} \overline{p}(s) \overline{\pi}_i (s) \geq \sum_{s \in S} \overline{p}(s) \overline{\pi}_i (\overline{\gamma}_i (s), s_{-i})$$

Equilibrio Correlacionado

Definition (Mecanismo de coordinación estocástico en forma reducida)

Un mecanismo de coordinación estocástico (en forma reducida) para un juego en forma estratégica es una distribución de probabilidad $\overline{p} : S_1 \times ... \times S_N \to [0, 1]$. Por simplicidad vamos a considerar únicamente el caso en el que la distribución es de soporte finito.

Definition (Equilibrio correlacionado en forma reducida)

Un equilibrio correlacionado es un mecanismo de coordinación estaocástica $\overline{p} : S_1 \times ... \times S_n \to [0, 1]$ tal que para toda función de recomendaciones para cada jugador $\overline{\gamma}_i : S_i \to S_i$ se tiene:

$$\sum_{s \in S} \overline{p}(s) \overline{\pi}_i (s) \geq \sum_{s \in S} \overline{p}(s) \overline{\pi}_i (\overline{\gamma}_i (s), s_{-i})$$

Ejemplo

- Considere de nuevo el ejemplo anterior:

1\2	A	B
X	**5,1**	0,0
Y	4,4	**1,5**

- Sea $\overline{p}(X, A) = \overline{p}(Y, A) = \overline{p}(Y, B) = \frac{1}{3}$.
- Este es un equilibrio correlacionado con pago esperado $3\frac{1}{3}$ para cada jugador.

- Un característica sobresaliente de la definición de equilibrio correlacionado es que le da un papel importante a las asimetrías de información. Específicamente, en un equilibrio correlacionado todos los jugadores usan una recomendación distinta.
- El siguiente ejemplo resalta el papel que juegan las asimetrías de información en situaciones estratégicas. En particular, vamos a ver que perder información expost puede tener como consecuencia una ganancia en eficiencia.

Ejemplo: Valor de la Información

Example

Considere el juego de la siguiente figura.

Table 2.9: *A three-player strategic-form game with a correlated equilibrium Pareto dominating Nash equilibria*

1 \ 2	A	B	1 \ 2	A	B	1 \ 2	A	B
X	0, 0, 3	0, 0, 0	X	2, 2, 2	0, 0, 0	X	0, 0, 0	1, 1, 1
Y	1, 1, 1	0, 0, 0	Y	0, 0, 0	2, 2, 2	Y	0, 0, 0	0, 0, 3
3	M			N			Q	

Ejemplo: Valor de la Información

- Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (Y, A, M) y (X, B, Q). Ambos equilibrios tiene un pago neto de 1 para cada jugador. Existen sin embargo estrategias conjuntas que domina a ambos equilibrios: (X, A, N), (Y, B, N). Consideremos ahora el siguiente mecanismo de coordinación estocástico (en forma reducida): $p(X, A, N) = p(Y, B, N) = \frac{1}{2}$. Entonces p soporta un equilibrio correlacionado con pago esperado 2 para cada jugador.

Ejemplo: Valor de la Información

- Ahora supongamos que 3 se le da la opción de pagar por conocer la recomendación puntual que el mecanismo le hace a los otros dos jugadores. En este caso 3 respondería de la siguiente forma: Si los otros dos juegan (X, A) el juega M y si juegan (Y, B) el juega Q. Luego si los otros dos jugadores son informados de que 1 a comprado esta opción ciertamente no jugaran las estrategias recomendadas y no habrá coordinación impidiendo que los jugadores obtuvieran un pago de 2. Luego la opción de obtener más información para 3 no tiene ningun valor.